Научная статья
УДК
378.147:512.642:514.742

DOI: 10.24412/2225-8264-2025-4-980

СИСТЕМАТИЗАЦИЯ И ОБОБЩЕНИЕ ЗНАНИЙ ПО ТЕМЕ «ВЕКТОРЫ» ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ АЛГЕБРЫ И ГЕОМЕТРИИ

Галич Ю. Г.[1]
Долгова Л. В.[2]
Приходько М. А.[3]

Ключевые слова: вектор, векторно-координатный метод, ЕГЭ по математике, задачи алгебры, задачи планиметрии, задачи стереометрии

Keywords: vector, vector-coordinate method, Unified State Exam in Mathematics, algebra problems, plane geometry problems, stereometry problems

Аннотация. *Понятие вектора является одним из фундаментальных понятий школьного курса геометрии и базовым для изучения последующих разделов математики и других естественных наук. Многолетний опыт работы авторов статьи показал низкий уровень системных знаний по теме «Векторы» у абитуриентов и студентов-первокурсников университета, а также неспособность решать не только прикладные, но и типовые задачи по данной теме. В статье анализируются причины сложившейся ситуации и предлагается один из способов решения проблемы.*

В работе проведен анализ содержания открытого банка заданий ЕГЭ по математике (профильный уровень, тема «Векторы»), обоснование рациональности решения ряда геометрических задач ЕГЭ векторно-координатным методом, классификация видов задач по стереометрии, которые рационально решать векторно-координатным методом, что по мнению авторов, обеспечивает не только закрепление теоретических знаний и операционных умений по теме «Векторы», но и способствует формированию метапредметных компетенций, позволяющих осуществлять перенос алгебраического аппарата в решение геометрических задач.

В статье приводится сравнение традиционного метода решения стереометрической задачи и векторно-координатного, с указанием преимуществ последнего и некоторых его недостатках. А также показаны примеры применения векторно-координатного метода при решении задач планиметрии и алгебры.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о том, что в подавляющем большинстве задач по стереометрии открытого банка ЕГЭ применение векторно-координатного метода является наиболее рациональным.

[1]**Галич Юлия Геннадьевна** — старший преподаватель кафедры высшей математики, Омский государственный университет путей сообщения (Россия, г. Омск, пр. Карла Маркса, д. 35)
E-mail: galichyulia@list.ru, ORCID: 0009-0008-4278-3839

[2]**Долгова Лариса Вячеславовна** — старший преподаватель кафедры высшей математики, Омский государственный университет путей сообщения (Россия, г. Омск, пр. Карла Маркса, д. 35)
E-mail: lv_dolgova@mail.ru

[3]**Приходько Маргарита Анатольевна** — кандидат педагогических наук, доцент кафедры высшей математики, Омский государственный университет путей сообщения (Россия, г. Омск, пр. Карла Маркса, д. 35)
E-mail: mprihma@yandex.ru

Поступила в редакцию: 5.05.2025

SYSTEMATIZATION AND GENERALIZATION OF KNOWLEDGE ON THE TOPIC «VECTORS» IN PREPARATION FOR THE UNIFIED STATE EXAM TO SOLVE PROBLEMS IN ALGEBRA AND GEOMETRY

Yuliya G. Galich
Senior Lecturer, Omsk State Transport University
Larisa V. Dolgova
Senior Lecturer, Omsk State Transport University
Margarita A. Prikhodko
Candidate of Pedagogical Sciences, Omsk State Transport University

Abstract. *The concept of a vector is one of the fundamental concepts of the school geometry course and the basis for studying subsequent sections of mathematics and other natural sciences. Many years of experience of the authors of the article showed a low level of systemic knowledge on the topic of «Vectors» among applicants and first-year university students, as well as the inability to solve not only applied, but also typical problems on this topic. The article analyzes the reasons for this situation and suggests one of the ways to solve the problem. The work analyzes the content of an open bank of tasks of the Unified State Exam in mathematics (profile level, topic «Vectors»), substantiates the rationality of solving a number of geometric problems of the Unified State Exam using the vector-coordinate method, classifies the types of problems in stereometry that are rationally solved using the vector-coordinate method, which, in the opinion of the authors, ensures not only the consolidation of theoretical knowledge and operational skills on the topic of «Vectors», but also contributes to the formation of meta-subject competencies that allow the transfer of algebraic apparatus to solving geometric problems. The article compares the traditional method of solving a stereometric problem and the vector-coordinate method, indicating the advantages of the latter and some of its disadvantages. It also shows examples of using the vector-coordinate method in solving problems of planimetry and algebra. The conducted research allows us to conclude that in the overwhelming majority of problems in stereometry of the open bank of the Unified State Exam, the use of the vector-coordinate method is the most rational.*

Одним из разделов дисциплины «Математика», изучаемых на первом курсе инженерных, технологических, экономических и других направлений подготовки является «Векторная алгебра». Определение геометрического вектора, понятия координат вектора и его длины, скалярного произведения векторов и его приложений являются фундаментальными. Знания учебного материала данного раздела являются базовыми при изучении последующих разделов математики, таких как «Аналитическая геометрия», «Комплексные числа», «Функции нескольких переменных», «Теория полей», «Линейное программирование», а также при изучении дисциплин естественнонаучного цикла: «Механика», «Электротехника», «Компьютерная графика» и др. Успешное овладение знаниями, умениями и навыками при изучении «Векторной алгебры» обеспечивается, в том числе, наличием соответствующей базы знаний школьного курса темы «Векторы».

Многолетний опыт работы авторов статьи с абитуриентами на подготовительных курсах, с учащимися профильных классов и слушателями центров довузовского обучения при Омском государственном университете путей сообщения (ОмГУПС) показывает, что уровень подготовки по теме «Векторы» оставляет желать лучшего. Этот вывод также подтверждается результатами анализа объема и глубины остаточных знаний у студентов первого курса ОмГУПСа. Низкий уровень базы школьного курса темы «Векторы» выражается в отсутствии систематических знаний и неумении применять основные формулы для решения не только прикладных, но и типовых (таких как вычисление координат вектора, его длины, скалярного произведения векторов и т. д.) задач.

Для решения данной проблемы необходима такая организация процесса обучения, в частности довузовского, которая обеспечивала бы систематизацию знаний по теме «Векторы» и способствовала формированию операционной составляющей, выражающейся в усвоении и овладении новыми способами действий и логическими приемами, обобщенными суждениями в рассматриваемой области. Вышесказанное обуславливает актуальность исследования, проведенного авторами, и обеспечивает достижение цели развития гибкости мышления обучающихся посредством компиляции методов решения геометрических задач.

Очевидно, что большая часть математических задач допускает различные варианты и способы их решения. И зачастую, пришедший первым на ум способ, не является наилучшим. Способность решить задачу оптимальным способом с применением оригинальных идей требует от обучающегося хорошей математической подготовки и опыта решения одной и той же задачи разными способами, в том числе предполагающими решение геометрических задач алгебраическими методами, алгебраических задач методами, основанными на наглядно-геометрических интерпретациях, а также различные возможности компиляции этих методов.

При решении геометрических задач на плоскости и в пространстве часто используют синтетический метод, подразумевающий построение решения с помощью интуиции, догадок, дополнительных построений, громоздких доказательств, что вызывает трудности у большинства школьников. При решении алгебраических задач использование традиционного метода так же может приводить к сложным преобразованиям. Решение задач векторно-координатным методом алгоритмизировано, что в большинстве случаев упрощается посредством перехода к достаточно малому числу формул, применение которых также не вызывает трудностей — это делает векторно-координатный метод удобным инструментом, лишенным перечисленных выше недостатков.

В научных исследованиях последних лет рассматриваются различные виды задач школьного курса математики с применением векторно-координатного метода, например, вычисление углов между прямыми и плоскостями [1], решение метрических задач на многогранниках [2], решение задач по стереометрии [3–5], доказательство теорем и свойств различных фигур [6; 7], решение алгебраических задач [8; 9], решение прикладных задач [10].

Важным шагом в привлечение внимания к теме «Векторы» стало то, что в 2023 году федеральным институтом педагогических измерений внесены изменения в контрольно-измерительные материалы (КИМ) ЕГЭ по математике (профильный уровень). В первую часть КИМ включено задание по геометрии (задание 2), проверяющее умения определять координаты точки, вектора, производить операции над векторами, вычислять длину и координаты вектора, угол между векторами [11].

Авторы провели анализ содержания прототипов задания 2 открытого банка задач ЕГЭ (математика, профильный уровень) [12] и выявили, что 10% всех заданий — это задачи на непосредственное вычисление длины вектора по заданным координатам (или координатам его начала и конца), 35 — на вычисление длины суммы (разности) двух и более векторов по их координатам (или координатам начала и конца), 40 — на вычисление скалярного произведения в координатной форме, 5 — на вычисление скалярного произведения в геометрической форме и 10% — на вычисление угла (косинуса угла) между векторами. Рассматривая операционную составляющую, можно заметить, что 20% задач решаются с применением одной формулы (одного свойства), 40 — с последовательными вычислениями посредством применения двух формул (или свойств), 40% — трех и более формул (свойств).

В настоящее время при изучении школьного курса геометрии используются учебники авторов: Л. С. Атанасяна [13], А. В. Погорелова [14], А. Д. Александрова [15] и др. Количество часов, отводимых на изучении темы «Векторы» в 9 классе варьируется от 8 до 18 в зависимости от программы обучения, а в 11 классе — от 6 до 15 часов. Этого явно недостаточно, поэтому целесообразно на факультативных занятиях в школах и занятиях со слушателями факультета довузовской подготовки университета уделять особое внимание этой теме, в частности, рационально использовать векторно- координатный метод при решении геометрических задач второй части профильного уровня ЕГЭ.

Для реализации векторно-координатного метода при решении геометрической задачи используются методические приемы рационализации координатного метода, которые предполагают оптимизацию процесса решения:

1) ввести прямоугольную систему координат и перевести условие задачи в векторную форму;

2) построить математическую модель решения задачи;

3) представить геометрическую интерпретацию полученного решения.

Векторно-координатный метод является эффективным средством для формирования навыков решения задач алгебры и геометрии. Перечислим некоторые умения, которыми необходимо обладать учащимся для решения геометрических задач векторно-координатным методом: рациональное введение системы координат на плоскости и (или) в пространстве; переход от геометрического к координатному представлению вектора; выполнение операций над векторами (нахождение координат вектора, его длины, линейные преобразования векторов); представление вектора линейной комбинацией базисных векторов; выражение угла между векторами по формуле скалярного произведения, установление коллинеарности и перпендикулярности векторов.

Примеры заданий на вычисление, при выполнении которых удобен переход к векторному методу решения. Основные приемы применения приведены в таблице 1.

Примеры заданий на доказательство, при выполнении которых удобен переход к векторному методу решения и основные приемы его применения приведены в таблице 2.

При решении перечисленных в таблицах 1 и 2 заданий традиционными способами реализуется аналитический и синтетический методы решения. Основным недостатком этих методов является отсутствие критериев, определяющих, с чего следует начинать решение: какие вспомогательные объекты выбрать, какие из свойств этих объектов применять и какие вспомогательные задачи с ними решить для выполнения основной задачи. Как правило, приходится опираться на свой опыт решения задач, проводить параллели с решениями других задач, что может приводить к громоздким вычислениям, ненужным действиям и не приводить к результату.

Достоинство векторно-координатного метода решения геометрических задач состоит в том, что он позволяет избежать введения вспомогательных геометрических объектов и их изображений, указывает общие приемы решения задач на базе применения меньшего числа основных формул. Этот метод позволяет свести решение геометрической задачи к алгебраическим методам, приводя краткую запись решения. К недостаткам применения метода можно отнести значительное число промежуточных вычислений, требующих аккуратности и точности.

В качестве примера рассмотрим решение геометрической задачи по материалам ЕГЭ, выполненное различными методами.

Таблица 1

Примеры применения векторного метода в заданиях на вычисление

Номер	Формулировка задания	Учебный материал
1	Найти длину отрезка на плоскости или в пространстве.	Формула для нахождения длины вектора по заданным координатам начала и конца.
		Формула разложение вектора по базисным векторам и нахождение его длины.
2	Найти величину угла между скрещивающимися прямыми.	Формула для нахождения угла между векторами.
3	Найти величину угла между прямой и плоскостью.	Формула для нахождения угла между векторами.
4	Найти величину угла между плоскостями.	Формула для нахождения угла между векторами.

Таблица 2

Примеры применения векторного метода в заданиях на доказательство

Номер	Формулировка задания	Учебный материал
1	Установить параллельность прямых на плоскости или в пространстве.	Понятие направляющего вектора прямой.
		Признак коллинеарности векторов.
2	Установить перпендикулярность прямых на плоскости или в пространстве.	Понятие направляющего вектора прямой.
		Признак перпендикулярности векторов.
3	Установить перпендикулярность прямой и плоскости.	Понятие направляющего вектора прямой.
		Понятие вектора нормали к плоскости.
		Признак коллинеарности векторов.
4	Установить параллельность прямой и плоскости.	Понятие направляющего вектора прямой.
		Понятие вектора нормали к плоскости.
		Понятие направляющего вектора прямой.
		Признак перпендикулярности векторов.

Задача 1. В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ стороны основания равны 3, боковые ребра равны 2, точка D середина ребра CC_1. Найдите расстояние от вершины C до плоскости ADB_1.

Решение (синтетический метод).

На чертеже изобразим данные условия задачи и выполним дополнительное построение — продлим B_1D до пересечения с продолжением ребра BC (точка K), как показано на рисунке 1.

Плоскости (ABC) и (ADB_1) пересекаются по прямой AK. Из точки D опустим перпендикуляр DH на прямую AK, тогда отрезок CH (проекция DH) перпендикулярен прямой AK. Прямая AK перпендикулярна плоскости (CDH), следовательно, плоскости (ADB_1) и (CDH) перпендикулярны. Высота CM плоскости (CDH) перпендикулярна плоскости (ADB_1), следовательно, CM – расстояние от точки C до плоскости (ADB_1).

Точка D – середина ребра CC_1, поэтому $CD = DC_1 = 1$; углы B_1DC_1 и CDK равны как вертикальные; углы B_1C_1D и DCK – прямые, следовательно, треугольники B_1C_1D и KCD равны. А, значит, $CK = B_1C_1 = 3$.

В равнобедренном треугольнике ACK угол C равен 120°, $AC = CK = 3$. Высота CH является биссектрисой, откуда $CH = AC\cdot\cos 60^\circ = 1{,}5$.

Треугольник CDH – прямоугольный, тогда вычисляем гипотенузу $DH=\sqrt{CD^2+CH^2}=\sqrt{1^2+1{,}5^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$ (по теореме Пифагора) и находим высоту, проведенную к гипотенузе $CM=\dfrac{CD\cdot CH}{DH}=\dfrac{3}{\sqrt{13}}=\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

Решение (векторно-координатный метод).

1) Введем прямоугольную систему координат с началом координат в точке A и осями x, y, z направленными вдоль прямых AK, AB, AA_1 соответственно (см. рисунок 1) и определяем в ней координаты точек: $A(0; 0; 0)$, $B(0; 3; 0)$, $C\left(\dfrac{3\sqrt3}{2};\dfrac{3}{2};0\right)$, $B_1\ (0; 3; 2)$, $D\left(\dfrac{3\sqrt3}{2};\dfrac{3}{2};1\right)$.

2) Вычислим коэффициенты уравнения $Ax + By + Cz + D = 0$ для плоскости $\alpha = (ADB_1)$, подставляя координаты точек A, D и B_1 в это уравнение, получим:

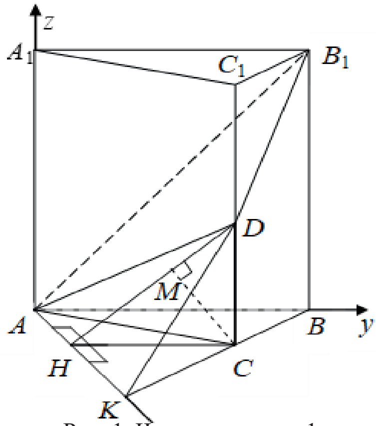

Рис. 1. Чертеж к задаче 1

$$\begin{cases} A\cdot 0+B\cdot 0+C\cdot 0+D=0,\\ A\cdot 0+3B+2C=0,\\ A\cdot 1{,}5\sqrt{3}+B\cdot 1{,}5+C=0;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}3B+2C=0,\\ A\cdot 1{,}5\sqrt{3}+B\cdot 1{,}5+C=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}D=0,\\ C=-1{,}5B,\\ A=0;\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=0,\\ B=2,\\ C=-3,\\ D=0.\end{cases}$$

3) Расстояние от точки C (x_0; y_0; z_0) до плоскости α находим по формуле:

$$d(C;\alpha)=\frac{|A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|0\cdot 1{,}5\sqrt{3}+2\cdot 1{,}5-3\cdot 0+0|}{\sqrt{0^2+2^2+(-3)^2}}=\frac{3}{\sqrt{13}}=\frac{3\sqrt{13}}{13}.$$

Ответ. $\dfrac{3\sqrt{13}}{13}$.

Для решения задачи синтетическим методом необходимо предварительно, на основе геометрической интуиции, догадаться выполнить дополнительные построения (вне многогранника и внутри него), осознавая их целенаправленность, а затем на этой основе перейти к новым планиметрическим конструкциям, используя в дальнейшем свойства объектов. Понятно, что, начиная решение задачи этим методом, нужно обладать не только базой системных знаний по соответствующему разделу стереометрии, но и уметь устанавливать реальные свойства пространственного объекта по его зрительному восприятию на плоском чертеже.

При решении задачи векторно-координатным методом мы ввели систему координат, определили координаты точек и векторов, которые необходимы для решения задачи и, применяя соотношения между ними и аппарат алгебры, нашли искомую величину. Отметим несомненные плюсы этого способа:

1) значение искомой величины не зависит от выбора системы координат;

2) нет необходимости делать дополнительные построения и их обосновывать;

3) возможность создания алгоритма решения задачи.

При этом стоит заметить, что с опытом приходит навык вводить систему координат так, чтобы упростить вычисления.

Проведя анализ геометрических задач (задание 14) ЕГЭ по математике (профильный уровень) и их решения, мы пришли к выводу, что введение системы координат, использование элементов векторной алгебры, а также применение основных соотношений между векторами целесообразно тогда, когда школьник не может определить угол между скрещивающимися прямыми, плоскостями, найти расстояние от точки до плоскости, расстояние между прямыми.

Таблица 3

Основные виды задач по стереометрии

Вид задачи (количество прототипов)	**Количество задач, которые позволяют использовать векторно-координатный метод**
Расстояние между прямыми и плоскостями (42)	30
Расстояние от точки до прямой (26)	26
Расстояние от точки до плоскости (57)	40
Сечения пирамид (70)	20
Сечения призм (31)	8
Сечения параллелепипедов (22)	4
Угол между плоскостями (44)	30
Угол между плоскостями граней многогранника (24)	24
Угол между прямой и плоскостью (25)	25
Угол между скрещивающимися прямыми (27)	10
Объемы многогранников (50)	–
Сечения круглых тел (3)	–
Круглые тела: цилиндр, конус, шар (32)	–

В таблице 3 приведены примеры основных видов задач по стереометрии (задача 14), предлагаемых в прототипах заданий ЕГЭ [12] и количество задач, которые целесообразнее решать векторно-координатным методом.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод, что более чем в 45% перечисленных задач рационально применить векторно-координатный метод.

Покажем примеры применения векторно-координатного метода для решения задач планиметрии.

Задача 2. На стороне AB угла ABC, равного 30° взята точка D так, что AD = 2 и BD = 1. Найдите радиус окружности, проходящий через точки A, D и касающейся прямой BC.

Решение.

1) Введем прямоугольную систему координат так, чтобы вершина угла совпадала с началом координат, а ось Ox прошла по лучу BC, как показано на рисунке 2.

2) По условию $BD = 1$, $AD = 2$, значит $AB = AD + BD = 3$. Треугольника BDE – прямоугольный, значит $DE = \frac{1}{2}BD = \frac{1}{2}$ (катет лежащий против угла 30° равен половине гипотенузы) и $BE = \sqrt{BD^2 - ED^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (по теореме Пифагора). Следовательно, координаты точки $D\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

Аналогично находим координаты точки A: $A\left(\frac{3\sqrt{3}}{2}; \frac{3}{2}\right)$.

Пусть $M(x_0; y_0)$ – центр окружности $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$.

Окружность касается луча BC в точке K, значит MK и BC перпендикулярны и $MK = R = y_0$.

Окружность проходит через точки A и D, значит, координаты этих точек удовлетворяют уравнению окружности. Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{1}{2} - y_0\right)^2 = y_0^2, \\ \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} - x_0\right)^2 + \left(\frac{3}{2} - y_0\right)^2 = y_0^2; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{3}{4} - \sqrt{3}x_0 + x_0^2 + \frac{1}{4} - y_0 + y_0^2 = y_0^2, \\ \frac{27}{4} - 3\sqrt{3}x_0 + x_0^2 + \frac{9}{4} - 3y_0 + y_0^2 = y_0^2; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_0^2 - \sqrt{3}x_0 - y_0 = -1, \\ x_0^2 - 3\sqrt{3}x_0 - 3y_0 = -9. \end{cases}$$

Умножим первое уравнение на – 3, прибавим ко второму уравнению и получим: $-2x_0^2 = -6$, $x_0 = \sqrt{3}$.

Найдем значение y_0: $3 - 3 - y_0 = -1$, $y_0 = 1$.

3) $R = 1$.

Ответ: 1.

Задача 3. Две стороны треугольника равны соответственно $2\sqrt{22}$ и $6\sqrt{2}$. Медианы, проведенные к этим сторонам, взаимно перпендикулярны. Найдите третью сторону треугольника.

Решение.

1) Обозначим вершины треугольника точками A, B и C, а медианы AD и CO. Введем прямоугольную систему координат так, чтобы ось Ox прошла вдоль одной из данных сторон, а ось Oy – через середину этой стороны, как показано на рисунке 3.

По условию $AB = 2\sqrt{22}$, $BC = 6\sqrt{2}$, $AO = OB$, $CD = BD$, тогда вершины и основания медиан треугольника имеют координаты: O(0; 0), $A\left(-\sqrt{22};0\right)$, $B\left(\sqrt{22};0\right)$, $C(x; y)$, $D\left(\frac{x+\sqrt{22}}{2}; \frac{y}{2}\right)$.

2) По условию медианы перпендикулярны, значит векторы, направленные по этим медианам тоже.

$$\overrightarrow{OC} = \{x; y\},\ \overrightarrow{AD} = \left\{\frac{x+3\sqrt{22}}{2}; \frac{y}{2}\right\},\ \overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0,\ \left|\overrightarrow{BC}\right| = 6\sqrt{2}.$$

Решаем систему уравнений: $\begin{cases} \overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0, \\ \left|\overrightarrow{BC}\right|^2 = 72; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2 + 3x\sqrt{22}}{2} + \frac{y^2}{2} = 0, \\ \left(x - \sqrt{22}\right)^2 + y^2 = 72; \end{cases} \Rightarrow$

$\begin{cases} x^2 + 3\sqrt{22}\,x + y^2 = 0, \\ x^2 - 2\sqrt{22}x + y^2 = 50. \end{cases}$ Вычитаем из первого уравнения второе: $5\sqrt{22}\,x = -50$, находим значение $x = -\frac{10}{\sqrt{22}}$ и вычисляем значение y:

$$\left(-\frac{10}{\sqrt{22}}\right)^2 + 3\sqrt{22} \cdot \left(-\frac{10}{\sqrt{22}}\right) + y^2 = 0,\ \frac{50}{11} - 30 + y^2 = 0,\ y^2 = \frac{280}{11},\ y = \sqrt{\frac{280}{11}}.$$

3) Длину третьей стороны вычисляем, как расстояние между точками A и C: $AC = \sqrt{\left(-\frac{10}{22} + \sqrt{22}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{280}{11}}\right)^2} = \sqrt{\frac{144}{22} + \frac{280}{11}} = 4\sqrt{2}.$

Ответ: $4\sqrt{2}$.

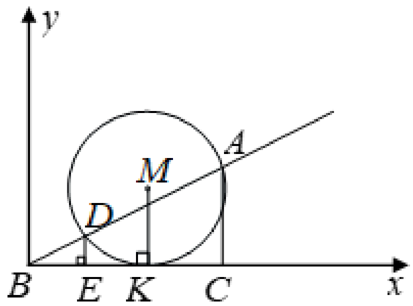

Рис. 2. Чертеж к задаче 2

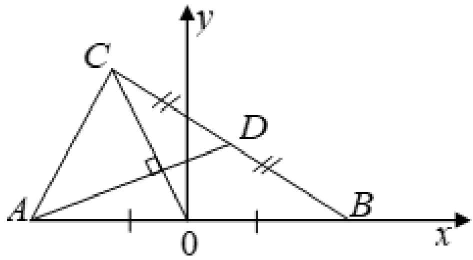

Рис. 3. Чертеж к задаче 3

Векторно-координатный метод позволяет алгоритмизировать решение не только геометрических задач. Полезно также познакомить учащихся с возможностью применения алгоритма векторно-координатного метода к решению некоторых алгебраических задач. Например, при решении иррациональных уравнений, доказательстве неравенств, нахождении наибольшего и наименьшего значений выражений и функций [9].

Приведем решение иррационального уравнения векторно-координатным методом.

Задача 4. Решить уравнение $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = x^2 - 6x + 11$.

Решение.

1) Введем векторы $\vec{a} = (\sqrt{x-2}; \sqrt{4-x})$, $\vec{b} = (1;1)$, применим свойство скалярного произведения векторов: $\vec{a} \cdot \vec{b} \le \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|$.

2) Преобразуем левую и правую части уравнения:

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = \sqrt{x-2} \cdot 1 + \sqrt{4-x} \cdot 1 \le \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|; \\ \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| = \sqrt{(\sqrt{x-2})^2 + (\sqrt{4-x})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{x-2+4-x} \cdot \sqrt{2} = 2, \end{cases} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} \le 2.$$

Имеем $\sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} \le 2$, но $x^2 - 6x + 11 = (x-3)^2 + 2 \ge 2$, значит, исходное уравнение равносильно системе уравнений $\begin{cases} \sqrt{x-2} + \sqrt{4-x} = 2; \\ x^2 - 6x + 11 = 2, \end{cases}$

3) Решением полученной системы является $x = 2$.

Ответ: 2.

Данный метод решения может быть предложен при обобщении знаний по решению иррациональных уравнений и позволяет избежать громоздких преобразований, связанных с двукратным возведением обеих частей уравнения в квадрат и исследования области допустимых значений уравнения.

По итогам проведенного исследования (результаты итоговой проверочной работы и опрос обучающихся о выборе метода при решении геометрических задач ЕГЭ) на базе факультета довузовской подготовки ОмГУПСа в 2022-2024 учебных годах, в котором приняли участие 92 ученика профильных 10–11 классов школ №№ 43, 45, 135, 110 слушателей очных и дистанционных подготовительных курсов по математике и 66 студентов первого курса ИАТИТа можно сделать вывод о динамике применения названного метода:

1) для решения задач на основе прямоугольного параллелепипеда (или куба) — с 17 до 79%; прямоуголь-

ной пирамиды — с 9 до 53%; произвольной пирамиды — с 6 до 47%;

2) для решения задач на доказательство параллельности (перпендикулярности) прямых — с 34 до 78%;

3) для решения задач на нахождение угла между прямыми и плоскостями — с 29 до 83%;

4) переход к векторно-координатному методу при решении задач стереометрии — с 19 до 78%;

5) правильность решения задач векторно-координатным методом по сравнению с синтетическим увеличилась на 59%.

В работе авторами обоснована рациональность решения ряда геометрических задач ЕГЭ векторно-координатным методом, отобраны виды геометрических задач планиметрии и стереометрии, при решении которых удобен переход к векторно-координатному методу решения и перечислены соответствующие объекты и закономерности теории векторов, позволяющие его выполнить, проведена классификация основных видов задач по стереометрии, предлагаемых в прототипах заданий ЕГЭ, решение которых удобно провести векторно-координатным методом. Перечисленное определяет новизну исследования.

Практический опыт, многолетние наблюдения и результаты нашего исследования показывают, что систематический подбор и структуризация задач геометрии при подготовке к ЕГЭ в системе довузовского обучения, при решении которых целесообразно применение векторно-координатного метода способствует не только закреплению теоретических знаний по теме «Векторы» и овладению навыками выполнения операций над векторами, но и формированию метапредметных компетенций, позволяющих осуществлять перенос алгебраического аппарата в решение геометрических задач и наоборот. Этот подход способствует достижению цели, поставленной авторами в своей работе: развитие гибкости мышления обучающихся, подготовка к решению задач повышенной сложности и формирование математических взаимосвязей.

Список источников

1. Гаджимурадов М. А., Гаджиева З. Д. О вычислении углов между прямыми и плоскостями при обучении геометрии // Известия Дагестанского государственного педагогического университета. Психолого-педагогические науки. 2024. Т. 18. № 3. С. 39–44.

2. Дербеденева Н. Н., Трунина К. В., Долгачева Т. В. Технология решения метрических задач на многогранниках векторно-координатным методом // Эвристическое обучение математике: Труды VI Международной научно-методической конференции (Донецк, 21–23 декабря 2023 г.). Донецк: ДонГУ, 2023. С. 240–245.

3. Байгонакова Г. А., Темербекова Г. А., Макапов А. А. Теоретические основы решения стереометрических задач векторно-координатным методом // Информация и образование: границы коммуникаций. 2019. № 11(19). С. 222–224.

4. Мухаметьярова А. Р. Применение среды GeoGebra при решении стереометрических задач векторно-координатным методом // Математическое и информационное моделирование: сборник научных трудов. Т. 17. Тюмень: ТюмГУ, 2019. С. 366–374.

5. Чиспияков С. В., Кравченко М. А. Применение векторно-координатного метода для решения задач по стереометрии // Теоретические и прикладные аспекты естественно-научного образования в эпоху цифровизации: Материалы III Международной научно-практической конференции (Брянск, 11–12 апреля 2024 г.). Брянск: БГУ им. И. Г. Петровского, 2024. С. 364–370.

6. Далингер В. А. Об одном доказательстве теоремы синусов // Развитие образования. 2020. № 1(7). С. 16–18.

7. Карымов И. А. Доказательство основных свойств параллелограмма при помощи векторно-координатного метода // Молодой ученый. 2021. № 13(355). С. 1–8.

8. Скамейкина Е. Ю. Геометрические методы решения алгебраических задач // Физико-математическое и естественно-научное образование: наука и школа. XX Емельяновские чтения: Материалы Всероссийской научно-практической конференции (Йошкар-Ола, 27 апреля 2023 г.). Йошкар-Ола: МарГУ, 2023. С. 233–238.

9. Рахимов Н. Н., Райимкулов П. М., Хакназарова Х. К. Решение некоторых алгебраических задач с использованием вектора // Интернет-журнал «International scientific review». 2017. №1 (32). С. 11–13. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_27812567_67629830.pdf (дата обращения: 02.03.2025).

10. Уварова М. Н., Гришина М. Н. Использование векторно-координатного метода при изучении дисциплин Математика и Физика // Ученые записки Орловского государственного университета. 2023. № 2(99). С. 338–341.

11. Изменения в КИМ ЕГЭ 2024 года // ФГБНУ ФИПИ. URL: https://doc.fipi.ru/ege/demoversii-specifikacii-kodifikatory/2024/Izmeneniya_KIM_EGE_2024.pdf (дата обращения: 22.02.2025).

12. Образовательный портал для подготовки к экзаменам // URL: https://ege.sdamgia.ru/prob-catalog (дата обращения: 22.02.2025).

13. Атанасян Л. С., Бутузов В. Ф., Кадомцев С. Б. и др. Геометрия. 10–11 классы: учебник. М.: Просвещение, 2009. 255 с.

14. Погорелов А. В. Геометрия: учебник для 7–11 классов. М.: Просвещение, 1993. 383 с.

15. Александров А. Д., Вернер А. Л., Рыжик В. И. Геометрия: учебник для 7–9 классов. М.: Просвещение, 2003. 272 с.

References

1. Gadzhimuradov M. A., Gadzhieva Z. D. On calculating angles between straight lines and planes in teaching geometry. *Izvestiya Dagestanskogo gosudarstvennogo pedagogicheskogo universiteta. Psixologo-pedagogicheskie nauki = Proceedings of the Dagestan State Pedagogical University. Psychological and pedagogical sciences*. 2024; 48(3): 39-44. (In Russ.).

2. Derbedeneva N. N., Trunina K. V., Dolgacheva T. V. Technology for solving metric problems on polyhedra using the vector-coordinate method // Heuristic teaching of mathematics: Proceedings of the VI International scientific and methodological conference (Donetsk, December 21–23, 2023). Donetsk: DonSU, 2023. pp. 240-245.

3. Baigonakova G. A., Temerbekova A. A., Makapov A. A. Theoretical foundations of solving stereometric problems using the vector coordinate method. *Informaciya i obrazovanie: granicy kommunikacij = Information and education: boundaries of communications*. 2019; 11(19): 222-224. (In Russ.).

4. Mukhametyarova A. R. Application of the GeoGebra environment in solving stereometric problems using the vector-coordinate method // Mathematical and information modeling: collection of scientific papers. Vol. 17. Tyumen: Tyumen State University, 2019. Pp. 366–374.

5. Chispiyakov S. V., Kravchenko M. A. Application of the vector-coordinate method for solving problems in stereometry // Theoretical and Applied Aspects of Natural Science Education in the Age of Digitalization: Proceedings of the III International Scientific and Practical Conference (Bryansk, April 11-12, 2024). Bryansk: BSU named after I. G. Petrovsky, 2024. Pp. 364-370.

6. Dalinger V. A. On one proof of the sine theorem. *Razvitie obrazovaniya = Development of education*. 2020; 1(7): 16-18. (In Russ.).

7. Kary`mov I. A. Proof of the basic properties of a parallelogram using the vector coordinate method. *Molodoj ucheny`j = Young scientist*. 2021; 13(355): 1-8. (In Russ.).

8. Skameikina E. Yu. Geometric methods for solving algebraic problems // Physics, mathematics, and natural science education: science and school. XX Emel'yanov readings: Proceedings of the All-Russian scientific and practical conference (Yoshkar-Ola, April 27, 2023). Yoshkar-Ola: MarSU, 2023. pp. 233–238.

9. Rakhimov N. N., Rayimkulov P. M., Khaknazarova Kh. K. Solving some algebraic problems using a vector. *Internet-zhurnal «International scientific review» = Online journal «International scientific review»*. 2017; 1(32): 11-13. URL: https://www.elibrary.ru/download/elibrary_27812567_67629830.pdf. (In Russ.).

10. Uvarova M. N., Grishina S. Y. The use of the vector coordinate method in the study of Mathematics and Physics disciplines. *Ucheny`e zapiski Orlovskogo gosudarstvennogo universiteta = Scientific notes of the Orel State University*. 2023; 2(99): 338-341. (In Russ.).

11. Changes in the CIM Unified State Exam of 2024. FGBNU FIPI. URL: Izmeneniya_KIM_EGE_2024.pdf

12. Educational portal for exam preparation. URL: ЕГЭ‒2025: задания, ответы, решения

13. Atanasian L. S., Butuzov V. F., Kadomtsev S. B., et al. Geometry. Grades 10–11: textbook. Moscow: Prosveshchenie, 2009. 255 p.

14. Pogorelov A. V. Geometry: textbook for grades 7–11. Moscow: Prosveshchenie, 1993. 383 p.

15. Aleksandrov A. D., Werner A. L., Ryzhik V. I. Geometry: textbook for grades 7–9. Moscow: Prosveshchenie, 2003. 272 p.