РАЗДЕЛ I.
ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ И ВОСПИТАНИЯ
(ПО ОБЛАСТЯМ И УРОВНЯМ ОБРАЗОВАНИЯ)
(ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ НАУКИ)

ББК 74.480.26+53 УДК 378.147:53. © И. И. Гончар, М. В. Чушнякова, Е. В. Кулик
DOI: 10.24412/2225-8264-2022-1-04-10

И. И. Гончар, М. В. Чушнякова, Е. В. Кулик

ПРИМЕНЕНИЕ МОДЕЛИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА В ПРЕПОДАВАНИИ РАЗДЕЛА «КОЛЕБАНИЯ» В ТЕХНИЧЕСКОМ ВУЗЕ

Нанотехнологии являются одним из приоритетов развития во всех областях современной науки и техники. Тепловые флуктуации играют для объектов наноразмерного масштаба особенно значимую роль. Однако в современных учебниках и образовательных стандартах изучению тепловых флуктуаций не уделяется достаточного внимания. Целью настоящей статьи является частичное заполнение этого пробела. Изложение материала сконцентрировано на модели стохастического гармонического осциллятора, то есть колебательной системы, находящейся под действием диссипативной и случайной (стохастической) сил. В статье приводится несколько примеров конкретных современных физических экспериментов и явлений, для описания которых необходимо применять эту модель. Изложен не слишком широко известный метод Чандрасекара построения плотности вероятности, зависящей одновременно от двух флуктуирующих переменных (для нашей задачи это обобщённые координата и скорость). В работе детально излагается метод вариации постоянных Лагранжа, на котором в дальнейшем строится решение дифференциального уравнения, описывающего гармонический осциллятор, подверженный случайным воздействиям. В результате с помощью этого метода получены конкретные формулы, предназначенные для описания временной зависимости дисперсии обобщённой координаты осциллятора, дисперсии его обобщённой скорости и их коррелятора, а также средних значений, обобщённых координаты и скорости. Эти формулы справедливы для случая затухающих колебаний, когда собственная частота осциллятора превосходит коэффициент затухания. Полученные формулы проанализированы на предмет предельных случаев. В частности, показано, что при малых временах дисперсия скорости стохастического гармонического осциллятора ведёт себя со временем так же, как дисперсия координаты свободной броуновской частицы.

Ключевые слова: броуновское движение, тепловые флуктуации, преподавание физики во ВТУЗе, стохастический гармонический осциллятор.

ВВЕДЕНИЕ

26 апреля 2007 года В. В. Путин в послании Федеральному Собранию назвал нанотехнологии «наиболее приоритетным направлением развития науки и техники» [11]. Поскольку нанотехнологии имеют дело с объектами размером от 100 нм до 10 нм, тепловые флуктуации играют здесь важную роль [1].Заметим, что Нобелевская премия по физике за 2021 год присуждена Джорджо Паризи (Giorgio Parisi) «за открытие взаимосвязей в хаосе и флуктуациях в физических системах от атомарных до планетарных масштабов» [3]. Однако в современных учебниках по физике для высших технических учебных заведений (ВТУЗов) [2, 9, 12] нам не удалось найти соответствующие разделы. Таким образом, разрыв между требованиями современных технологий и уровнем физического образования налицо. В данной работе мы пытаемся отчасти восполнить этот пробел и концентрируем своё внимание на учёте флуктуаций при преподавании раздела «Колебания». За основу мы берём при этом метод вариации постоянных Лагранжа [13] и нашу работу [7].

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Любая макроскопическая и мезоскопическая (наноразмерная) система всегда находится под действием тепловых флуктуаций. Они обусловлены взаимодействием между системой и средой, которая состоит из множества мелких частиц (атомов, молекул), находящихся в непрерывном тепловом движении. Это утверждение представляет собой следствие второй базовой идеи физики. Мы сформулировали эти базовые идеи в [4–6].

С развитием нанотехнологий влияние тепловых флуктуаций в современных технических устройствах выходит на первый план. Напомним, что гармонический осциллятор (ГО) есть математическая модель: система, энергия которой выражается формулой

$$W = \frac{\tilde{m}\dot{\xi}^2}{2} + \frac{\tilde{k}\xi^2}{2}. \quad (1)$$

Здесь $\boldsymbol{\xi}$ – обобщённая координата, $\dot{\boldsymbol{\xi}}$ – обобщённая скорость, $\widetilde{\boldsymbol{m}}$ - обобщённая масса, $\widetilde{\boldsymbol{k}}$ – обобщённая жёсткость. Физический смысл и размерность $\boldsymbol{\xi}$, $\dot{\boldsymbol{\xi}}$, $\widetilde{\boldsymbol{m}}$, $\widetilde{\boldsymbol{k}}$ зависят от конкретной физической задачи.

ГО, подверженный случайным воздействиям, называют стохастическим гармоническим осциллятором (СГО). Динамическое дифференциальное уравнение, описывающее СГО, имеет вид

$$\tilde{m}\ddot{\xi} + \tilde{r}\dot{\xi} + \tilde{k}\xi = \Phi(t). \qquad (2)$$

Здесь $\tilde{r}$ – обобщённый коэффициент сопротивления, характеризующий диссипативное воздействие среды на осциллятор; $\Phi(t)$ – обобщённая случайная сила, обусловливающая флуктуации. В простейшем случае (белый шум, марковский процесс) эта случайная сила обладает следующими статистическими свойствами

$$\langle\Phi(t)\rangle = 0,\ \langle\Phi(t_1)\Phi(t_2)\rangle = 2D_p\delta(t_1 - t_2) \qquad (3\ \text{а, б})$$

Угловыми скобками здесь обозначено усреднение по ансамблю, $\boldsymbol{\delta(s)}$ – дельта-функция Дирака, которую удобно представлять в виде распределения Гаусса с очень малой дисперсией:

$$\delta(s) = \lim_{\sigma_s^2 \to 0}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_s^2}}\exp\left(-\frac{s^2}{2\sigma_s^2}\right)\right\}. \qquad (4)$$

Формула (3 б) означает, что действие случайной силы не скоррелировано: её значение в каждый последующий момент времени совершенно не зависит от того, каким оно было в предыдущий момент.

Коэффициент диффузии в импульсном пространстве $\boldsymbol{D_p}$ связан с энергией теплового движения $\boldsymbol{\theta}$ и $\tilde{\boldsymbol{r}}$:

$$D_p = \tilde{r}\theta. \qquad (\mathbf{5})$$

Формула (5) выражает собой соотношение Эйнштейна (флуктуационно-диссипативную теорему) [1].

Разделив динамическое уравнение (2) на обобщённую массу, мы приходим к кинематическому дифференциальному уравнению для СГО

$$\ddot{\xi} + 2\beta\dot{\xi} + \omega_0^2\xi = \Phi(t)/\tilde{m} = f(t). \qquad (6)$$

Здесь $\beta = \tilde{r}/(2\tilde{m})$ – коэффициент затухания, ω_0 – собственная частота ГО. Именно с этим уравнением мы будем работать ниже.

Примером СГО может служить стрелка чувствительного электроизмерительного прибора: при измерении очень слабых токов становится заметно, что она слегка подрагивает, что и определяет предел точности измерений.

Следующий пример описан в недавней статье [15], посвящённой задаче Крамерса – задаче о распаде квазистационарного состояния под действием тепловой активации [18]. В экспериментальной работе [15] поле мощного излучения двух лазеров формирует двойную потенциальную яму, разделённую барьером высотой $\boldsymbol{U_b}$ посередине. Потенциальная энергия в каждой из ям с хорошей точностью имеет вид второго слагаемого в формуле (1). Кремниевые наночастицы находятся в этом поле в камере, давление газа в которой можно регулировать. Таким образом регулируется коэффициент затухания $\boldsymbol{\beta}$ в формуле (6). За счёт случайного взаимодействия с газом наночастицы хаотически движутся в каждой из ям и перепрыгивают из одной ямы в другую. Экспериментально изучается среднее время жизни наночастиц в каждой из ям, которое сравнивается с теоретическими предсказаниями работ [18, 19]. Отметим, что задача о среднем времени жизни частицы в яме (задача Крамерса) превращается в задачу о СГО при значении безразмерного управляющего параметра значительно превосходящем единицу: $\boldsymbol{G \gg 1}$.

$$G = \frac{U_b}{\theta}, \qquad (7)$$

Наконец, в качестве третьего примера применения модели СГО рассмотрим эксперимент по растягиванию отдельной биологической молекулы (например, протеина) [16, 17]. Такая молекула представляет собой полимер, состоящий из множества повторяющихся блоков. Между блоками молекулы действую квазиупругие силы, так что каждый из блоков ведёт себя как ГО. Молекула находится в водном растворе, поэтому на её блоки действуют сила трения и стохастическая (случайная) сила: осциллятор становится стохастическим. Молекулу растягивают с помощью кантилевера атомно-силового микроскопа, добиваясь, чтобы «пружинка», соединяющая блоки, полностью потеряла свою упругость. Таким образом измеряют энергию связи блоков в молекуле. Для анализа экспериментальных данных в работах [16, 17] тоже применяется модель СГО и формула Крамерса [18].

Для построения формального решения уравнения (6) мы будем пользоваться результатами, изложенными в нашей предыдущей работе [7]. В ней мы близко следовали учебнику В. И. Смирнова «Курс высшей математики» [13].

ПЛОТНОСТЬ ВЕРОЯТНОСТИ ДЛЯ ОБОБЩЁННЫХ КООРДИНАТЫ И СКОРОСТИ СГО

Существенное отличие рассматриваемого случая от детерминистического ГО состоит в том, что для внешней вынуждающей силы известны лишь статистические свойства. Соответственно, не имеет смысла говорить о детерминированной зависимости обобщённой координаты и обобщённой скорости от времени. Вместо этого состояние СГО описывается с помощью скалярной физической величины $\boldsymbol{P(\xi, v, t)}$, которая называется плотностью вероятности и является функцией обобщённой координаты $\boldsymbol{\xi}$ и обобщённой скорости $\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{v}$. Определение такой плотности вероятности выражается формулой

$$d\Pi = P(\xi, v, t)d\xi dv. \qquad (8)$$

Здесь $\boldsymbol{d\Pi}$ – малая вероятность того, что СГО имеет координату в интервале между $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{\xi + d\xi}$, а скорость – в интервале между $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{v + dv}$. Среднее значение произвольной функции $\boldsymbol{Q(\xi, v)}$ вычисляется с помощью плотности вероятности следующим образом

$$\langle Q(\xi, v)\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} dv\, Q(\xi, v)P \qquad (9)$$

Вычисленное таким образом среднее значение может зависеть от времени.

В [14] доказана лемма, согласно которой на основании формул (14), (15), (24) из [7] можно построить $\boldsymbol{P(\xi, v, t)}$. Утверждение леммы состоит в следующем. Пусть случайная сила обладает свойствами (3), а случайные переменные $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{S}$ выражаются формулами

$$R(t) = \int_0^t \psi(s)\, f(s)ds, \qquad (10)$$

$$S(t) = \int_0^t \chi(s)\, f(s)ds. \qquad (11)$$

Тогда плотность вероятности $\boldsymbol{P(R, S, t)}$ имеет вид двумерного гауссова распределения

$$P(R, S, t) = \frac{1}{2\pi\sqrt{KL - H^2}} \exp\left\{-\frac{LR^2 + KS^2 - 2HRS}{2(KL - H^2)}\right\} \qquad (12)$$

В формуле (12)

$$K(t) = 2D_v \int_0^t \psi^2(s)ds, \qquad (13)$$

$$L(t) = 2D_v \int_0^t \chi^2(s)ds, \qquad (14)$$

$$H(t) = 2D_v \int_0^t \chi(s)\psi(s)ds. \qquad (15)$$

В формулах (13), (14), (15) величина $\boldsymbol{D_v}$ представляет собой коэффициент диффузии в пространстве скоростей

$$D_v = \frac{2\beta\theta}{\widetilde{m}}. \qquad (16)$$

Заметим, что $[\boldsymbol{D_v}] = [\boldsymbol{v^2}]/[\boldsymbol{t}]$. Такая связь размерностей представляет собой общее свойство коэффициентов диффузии: в большинстве стандартных учебников показывается, что $[\boldsymbol{D_x}] = [\boldsymbol{x^2}]/[\boldsymbol{t}]$. Нетрудно также убедиться в том, что $[\boldsymbol{D_p}] = [\boldsymbol{p^2}]/[\boldsymbol{t}]$ (см. формулу (5)).

Вернёмся к формуле (12). Сравнивая её со стандартным двумерным гауссовым распределением (см. например, [10]), в котором в качестве случайных величин выступают $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{v}$,

$$P(\xi, v, t) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_v\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\frac{(\xi - \xi_m)^2}{\sigma_\xi^2} + \frac{(v - v_m)^2}{\sigma_v^2} - \frac{2\rho(\xi - \xi_m)(v - v_m)}{\sigma_\xi\sigma_v}\right]\right\}, \qquad (17)$$

приходим к выводу, что дисперсии $\boldsymbol{\sigma_\xi^2}$, $\boldsymbol{\sigma_v^2}$ и коэффициент корреляции между величинами $\boldsymbol{\xi}$ и $\boldsymbol{v}$, $\boldsymbol{\rho}$, связаны с $\boldsymbol{K}$, $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{H}$ формулами

$$K = \sigma_\xi^2, \qquad L = \sigma_v^2, \qquad H = \rho\sigma_\xi\sigma_v \qquad (18)$$

Величины $\boldsymbol{\xi_m}$ и $\boldsymbol{v_m}$ представляют собой средние значения:

$$\langle\xi\rangle = \xi_m, \qquad \langle v\rangle = v_m\,. \qquad (19)$$

Напомним также определения дисперсий и коррелятора:

$$\sigma_\xi^2 = \langle\xi^2\rangle - \xi_m^2, \qquad \sigma_v^2 = \langle v^2\rangle - v_m^2,$$
$$\rho\sigma_\xi\sigma_v = \langle\xi v\rangle - \xi_m v_m. \qquad (20)$$

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ЛАГРАНЖА ДЛЯ СТОХАСТИЧЕСКОГО ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Применим теперь формальную схему метода Лагранжа (см. формулы (14), (15), (24) из [7]) для решения конкретного физического уравнения СГО (6). Два линейно независимых решения соответствующего однородного уравнения имеют вид

$$\xi_+(t) = C_+\exp(\lambda_+ t), \qquad \xi_-(t) = C_-\exp(\lambda_- t). \quad (21)$$

Константы $\boldsymbol{C_+}$ и $\boldsymbol{C_-}$ определяются начальными условиями. Собственные значения $\boldsymbol{\lambda_+}$ и $\boldsymbol{\lambda_-}$ в формуле (21) имеют вид

$$\lambda_\pm = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \omega_0^2} = -\beta \pm i\omega_d. \qquad (22)$$

Более подробно этот материал обсуждается в нашей работе [7].

Используя формулы (14), (15), (24) из [7] и (21), для обобщённой координаты СГО получаем следующее выражение

$$\xi(t) = C_+\exp(\lambda_+ t) + C_-\exp(\lambda_- t) - \frac{\exp(\lambda_+ t)}{2i\omega_d}\int_0^t f(s)\exp(-\lambda_+ s)ds + \frac{\exp(\lambda_- t)}{2i\omega_d}. \quad (23)$$

Дифференцируя эту формулу по времени, получаем формальную зависимость скорости от времени

$$v(t) = \lambda_+ C_+\exp(\lambda_+ t) + \lambda_- C_-\exp(\lambda_- t) - \frac{\lambda_+\exp(\lambda_+ t)}{2i\omega_d}\int_0^t f(s)\exp(-\lambda_+ s)ds + \frac{\lambda_-\exp(\lambda_- t)}{2i\omega_d}\int_0^t f(s)\exp(-\lambda_- s)ds, \quad (24)$$

В формуле (23) можно увидеть структуру (10), если обозначить

$$R(t) = \xi(t) - C_+\exp(\lambda_+ t) - C_-\exp(\lambda_- t), \quad (25)$$

$$\psi(s) = \frac{1}{2i\omega_d}\{-\exp[\lambda_+(t-s)] + \exp[\lambda_-(t-s)]\}. \quad (26)$$

Соответственно, формула (24) имеет структуру (11) если обозначить

$$S(t) = v(t) - \lambda_+ C_+\exp(\lambda_+ t) - \lambda_- C_-\exp(\lambda_- t), \quad (27)$$

$$\chi(s) = \frac{1}{2i\omega_d}\{-\lambda_+\exp[\lambda_+(t-s)] + \lambda_-\exp[\lambda_-(t-s)]\}. \quad (28)$$

Используя первую из формул (18), а также формулы (26) и (13), получаем для дисперсии координаты следующее выражение

$$\sigma_\xi^2 = -\frac{D_v}{2\omega_d^2}\left\{\frac{1}{2\omega_0^2}[\lambda_-\exp(2\lambda_+ t) + \lambda_+\exp(2\lambda_- t)] + \frac{1}{\beta}[\exp(-2\beta t) - 1] + \frac{\beta}{\omega_0^2}\right\}, \quad (29)$$

собственные значения $\boldsymbol{\lambda_+}$ и $\boldsymbol{\lambda_-}$ в случае затухающих колебаний $(\boldsymbol{\omega_0 > \beta})$ являются комплексными (см. формулы (22)). Разумеется, дисперсия должна быть вещественной и положительной. Подставляя выражения для $\boldsymbol{\lambda_+}$ и $\boldsymbol{\lambda_-}$ в формулу (29), получаем окончательное выражение для дисперсии обобщённой координаты СГО при затухающих колебаниях в виде

$$\sigma_\xi^2(t) = \frac{D_v}{2\omega_d^2}\left\{e^{-2\beta t}\left[\frac{\beta}{\omega_0^2}\cos(2\omega_d t) - \frac{\omega_d}{\omega_0^2}\sin(2\omega_d t) - \frac{1}{\beta}\right] + \frac{\omega_d^2}{\beta\omega_0^2}\right\}. \quad (30)$$

Аналогичным образом из формул (14), (15) и (18) получаются следующие формулы для дисперсии скорости и коэффициента корреляции

$$\sigma_v^2(t) = \frac{D_v}{2\omega_d^2}\left\{e^{-2\beta t}\left[\beta\cos(2\omega_d t) + \omega_d\sin(2\omega_d t) - \frac{\omega_0^2}{\beta}\right] + \frac{\omega_d^2}{\beta}\right\}, \quad (31)$$

$$\rho = \frac{D_v}{\omega_d^2\,\sigma_\xi\sigma_v}\,e^{-2\beta t}\sin^2(\omega_d t). \quad (32)$$

Подставляя в формулы (30), (31), (32) начальный момент времени $\boldsymbol{t_0 = 0}$, находим, $\boldsymbol{\sigma_{\xi 0}^2 = 0}$, $\boldsymbol{\sigma_{v0}^2 = 0}$, $\boldsymbol{\rho_0 = 0}$.

Интересно посмотреть, как ведёт себя дисперсия обобщённой координаты для малых времён, т.е. при $\boldsymbol{\beta t \ll \omega_d t \ll 1}$. Для этого применим в формуле (30) разложение в ряд Тейлора до третьего порядка малости. При этом

$$e^{-2\beta t} \approx 1 - 2\beta t + 2\beta^2 t^2 - \frac{8\beta^3 t^3}{6}. \quad (33)$$

Тогда формула $(\mathbf{30})$ принимает вид

$$\sigma_\xi^2 = \frac{2D_v t^3}{3}, \quad (34)$$

учитывая связь $\boldsymbol{D_v}$ с параметрами задачи (16), получаем

$$\sigma_\xi^2 = \frac{4\beta\theta t^3}{3\widetilde{m}}. \quad (35)$$

Аналогичным образом для $\boldsymbol{\beta t \ll 1}$ получаем $\boldsymbol{\sigma_v^2 = 2D_v t}$. Такая зависимость хорошо знакома [1, 8], она отвечает дисперсии координаты при свободной диффузии.

Для того, чтобы по формуле (17) можно было производить вычисления, осталось определить $\boldsymbol{\xi_m}$ и $\boldsymbol{v_m}$. Усредняем по ансамблю формулу (23) и учитываем, что среднее значение от $\boldsymbol{f(s)}$ равно нулю в силу формулы (3а). Тогда для $\boldsymbol{\xi_m}$ получаем

$$\xi_m(t) = C_+\exp(\lambda_+ t) + C_-\exp(\lambda_- t). \quad (36)$$

Аналогично, из формулы (24) находим

$$v_m(t) = \lambda_+ C_+\exp(\lambda_+ t) + \lambda_- C_-\exp(\lambda_- t). \quad (37)$$

Подставляя в (36) и (37) начальные условия $\boldsymbol{\xi_m(t=0)=\xi_0}$ и $\boldsymbol{v_m(t=0)=v_0}$, находим постоянные $\boldsymbol{C_+}$ и $\boldsymbol{C_-}$. Затем используя формулу (22) для $\boldsymbol{\lambda_+}$ и $\boldsymbol{\lambda_-}$, находим окончательно

$$\xi_m = \frac{e^{-\beta t}}{\omega_d}\{\xi_0[\beta\sin(\omega_d t) + \omega_d\cos(\omega_d t)] + v_0\sin(\omega_d t)\}, \qquad (38)$$

$$v_m = \frac{e^{-\beta t}}{\omega_d}\left\{v_0\left[\cos(\omega_d t) - \frac{\beta}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right] - \frac{\xi_0\omega_0^2}{\omega_d}\sin(\omega_d t)\right\}, \qquad (39)$$

Таким образом, плотность вероятности $\boldsymbol{P(\xi,v,t)}$ (формула (17)) полностью определена. Она отвечает дельта-образным начальным условиям

$$P(\xi,v,0) = \delta(\xi-\xi_0)\delta(v-v_0). \qquad (40)$$

Из формул (30), (31) видно, что (первоначально нулевые) дисперсии координаты и скорости со временем стремятся к свои равновесным значениям

$$\sigma_{\xi eq}^2 = \frac{\theta}{2\tilde{k}}, \qquad \sigma_{veq}^2 = \frac{\theta}{2\tilde{m}}, \qquad (41)$$

Здесь $\boldsymbol{\tilde{k}=\omega_0^2\tilde{m}}$ – обобщённая жёсткость. Коэффициент корреляции $\boldsymbol{\rho}$ стремится к нулю согласно формуле (32).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы предложили дополнить преподавание раздела «Колебания» во ВТУЗах материалом, который описывает флуктуации координаты и импульса гармонического осциллятора. С помощью метода вариации постоянных Лагранжа построена плотность вероятности для обобщённой координаты и обобщённой скорости стохастического гармонического осциллятора, находящегося под действием белого шума. Для случая дельта-образных начальных условий получена зависимость средних значений координаты и скорости, а также их дисперсий от времени.

В процессе преподавания вовсе необязательно воспроизводить все выкладки, обсуждавшиеся в данной работе. Полезнее уделить основное внимание качественному анализу эволюции дисперсий (формулы (30), (31)) и средних значений (формулы (38), (39)), а также построить графики и познакомить студентов с разными предельными случаями. Можно дополнительно произвести все выкладки для случая апериодического затухания: $\boldsymbol{\omega_0 < \beta}$.

Библиографический список

1. Ансельм, А. И. Основы статистической физики и термодинамики / А. И. Ансельм. — Москва : Наука, 1973. — 337 с. — Текст : непосредственный.
2. Астахов, А. В. Курс физики в 3-х томах. Том 1. Механика. Кинетическая теория материи / А. В. Астахов. — Москва : Наука, 1977. — 331 с. — Текст : непосредственный.
3. Власов, К. Нобелевская премия по физике — 2021 / К. Власов. — Текст: электронный // Элементы. Новсти науки. — 2021. — 11.10. — URL:https://elementy.ru/novosti_nauki/433877/Nobelevskaya_premiya_ po_ fizike_2021, свободный. — Элементы.
4. Гончар, И. И. Иерархия определений физических величин и основные положения молекулярно - кинетической теории/ И. И. Гончар, М. В. Чушнякова. — Текст: непосредственный // АЭТЕРНА Взаимодействие науки и общества: проблемы и перспективы. — 2016. — 2 (34). — С. 91-94.
5. Гончар, И. И. Основные положения молекулярно-кинетической теории как отправная точка в изучении физики / И. И. Гончар, М. В. Чушнякова, С. Н. Крохин. — Текст : непосредственный // Вестник Омского университета. — 2017, — 2(84). — С. 36-40.
6. Гончар, И. И. Особенности преподавания физики в российских технических вузах первой четверти XXI века / И. И. Гончар, М. В. Чушнякова, Т. А. Аронова. — Текст : непосредственный // Вестник Омского государственного педагогического университета. Гуманитарные исследования. — 2019. — 1 (22). — С. 97-99.
7. Гончар, И. И. Соотношение между физическими и математическими аспектами при изучении темы «Колебания» в техническом вузе / И. И. Гончар, М. В. Чушнякова, С. Н. Крохин. — Текст : непосредственный // Вестник Сибирского института бизнеса и информационных технологий. — 2020. — 2 (34). — С. 23-29.
8. Гончар, И.И. Учебное пособие. «Краткий курс теории физических полей» / И.И. Гончар, С.Н. Крохин. — Омск: Омский государственный университет путей сообщения, 2016.— 70 с. — Текст : непосредственный.
9. Иродов, И. Е. Основные законы механики. / И. Е. Иродов. — Москва : БИНОМ, 2014. — 309 с. — Текст: непосредственный.

References

1. Anselm, A. I. *Osnovy statisticheskoy fiziki i termodinamiki* [Foundations of statistical physics and thermodynamics]. Moscow, 1973, 337 p.

2. Astakhov, A. V. *Kurs fiziki. Tom 1. Mekhanika. Kineticheskaya teoriya materii* [Physics course. Volume 1. Mechanics. Kinetic theory of matter]. Moscow, 1977, 384 p.

3. Vlasov, K. *Nobelevskaya premiya po fizike* — 2021 [Nobel Prize in Physics – 2021]. – // Elementy. Novosti nauki. — 2021. — 11.10. — URL: https://elementy.ru/novosti_nauki/433877/Nobelevskaya_premiya_ po_ fizike_2021, svobodnyy. — Tekst : elektronnyj.

4. Gonchar, I. I. *Iyerarkhiya opredeleniy fizicheskikh velichin i osnovnyye polozheniya molekulyarno - kineticheskoy teorii* [Hierarchy of definitions of physical quantities and basic provisions of molecular - kinetic theory] / I. I. Gonchar, M. V. Chushnyakova. — Tekst : neposredstvennyy // AETERNA Vzaimodeystviye nauki i obshchestva: problemy i perspektivy. — 2016. — 2 (34). — P. 91-94.

5. Gontchar I. I. *Osnovnye polozheniya molekulyarno-kineticheskoj teorii kak otpravnaya tochka v izuchenii fiziki* [The main provisions of the molecular-kinetic theory as a starting point in the study of physics] / I. I. Gontchar, M. V. Chushnyakova, S. N. Krokhin. — Tekst : neposredstvennyj // Vestnik Omskogo universiteta. — 2017, — 2(84). — S. 36-406.

7. Gontchar I. I. *Sootnoshenie mezhdu fizicheskimi i matematicheskimi aspektami pri izuchenii temy «Kolebaniya» v tekhnicheskom vuze* [The relationship between physical and mathematical aspects in the study of the topic «Oscillations» in a technical university] / I. I. Gontchar, M. V. Chushnyakova, S. N. Krokhin. — Tekst : neposredstvennyj // Vestnik Sibirskogo instituta biznesa i informacionnyh tekhnologij. — 2020. — 2 (34). — S. 23-29.

8. Gonchar, I.I. *Uchebnoye posobiye. «Kratkiy kurs teorii fizicheskikh poley»* [Tutorial. "A short course in the theory of physical fields"] / I.I. Gonchar, S.N. Krokhin. — Omsk: Omskiy gosudarstvennyy universitet putey soobshcheniya, 2016.— 70 s. — Tekst : neposredstvennyy.

9. Irodov I. E. *Mekhanika. Osnovniye zakony* [Mechanics. Principal laws]. – Moscow, BINOM. Laboratoriya znaniy, 2014. – 309 p.

10. Korn, G. *Spravochnik po matematike dlya nauchnykh rabotnikov i inzhenerov* [Handbook of mathematics for scientists and engineers] / G. Korn, T. Korn. — Moskva: Nauka, 1973.— 582 s. — Tekst : neposredstvennyy.

11. Rossiyskaya Federatsiya. Prezident. Poslaniye Prezidenta RF Federal'nomu Sobraniyu ot 26.04.2007: "*Poslaniye Prezidenta Rossii Vladimira Putina Federal'nomu Sobraniyu RF*" [The message of the President of the Russian Federation to the Federal Assembly of 26.04.2007: "The message of the President of Russia Vladimir Putin to the Federal Assembly of the Russian Federation"] / Rossiyskaya Federatsiya. Prezident (2004 — 2008; V. V. Putin). — Tekst: elektronnyy // Konsul'tantPlyus. VersiyaProf. — Moskva, 2007. — 1 CD-ROM.

12. Sivukhin D. V. *Obschiy kurs fiziki. Uchebnoe posobie v 5 t. Tom 1. Mekhanika* [General course of physics: Textbook in 5 books. Book 1. Mechanics]. – Moscow, Fizmatlit, 2014. – 560 p.

13. Smirnov V. I. *Kurs vjsshey matematiki: Uchebnik dlya vuzov v 5 t. Tom II* [Course of the calculus: Textbook for universities in 5 books. Book II]. – Sant-Petersburg, BHV-Peterburh, 2008. – 848 p.

14. Chandrasekhar, S. Stohastic problems in physics and astronomy / S Chandrasekhar. — Tekst : neposredstvennyy // Review of Modern Physics. — 1943. — 15(1).

15. Direct measurement of Kramers turnover with a levitated nanoparticle / L. Rondin, J. Gieseler, F. Ricci, R. Quidant, C. Dellago. — Tekst : neposredstvennyy // Nature Nanotechnology. — 2017. — 12. — P. 1130-1133.

16. Dudko, O.K. Intrinsic Rates and Activation Free Energies from Single-Molecule Pulling Experiments/ O.K. Dudko, G. Hammer, A. Szabo. — Tekst : neposredstvennyy // Physical review letters. — 2006. — 96. — P. 1-4.

17. Hammer, G. Kinetics from Nonequilibrium Single-Molecule Pulling Experiments / G. Hammer, A. Szabo. — Tekst : neposredstvennyy // Biophysical Journal. — 2003. — 85. — P. 5-15.

18. Kramers, H.A. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions / H.A. Kramers. — Tekst : neposredstvennyy // Physica. — 1940. — 7. — P. 284-304.

19. Melnikov, V.I. The Kramers problem: fifty years of development / V.I. Melnikov. — Tekst : neposredstvennyy // Physics Reports. — 1991. — 209(1).

APPLICATION OF THE STOCHASTIC HARMONIC OSCILLATOR MODEL IN TEACHING THE SECTION "FLUCTUATIONS" IN A TECHNICAL UNIVERSITY

Igor I. Gontchar,
Physics and Chemistry Department, Omsk State Transport University, Omsk, Russia
Maria V. Chushnyakova,
Physics Department, Omsk State Technical University, Omsk, Russia
Ekaterina V. Kulik
Physics Department, Omsk State Technical University, Omsk, Russia

Abstract. Nanotechnologies represent one of the priorities of the progress in all fields of the modern science and technology. The thermal fluctuations play a significant role for the nanosized objects. However, in modern textbooks and educational standards, studying thermal fluctuations have not received enough attention. The purpose of the present paper is to fill in this lacune partially. The presentation of the material is focused on the stochastic harmonic oscillator model, i.e. on the vibrational system experiencing the action of the dissipative and stochastic (random) forces. In the paper, we present several examples of specific modern physical experiments and phenomena requiring the above model for their description. The Chandrasekhar method for constructing the probability density depending simultaneously upon two fluctuating variables (being for our problem the generalized coordinate and velocity) is enunciated. This method is not widely known. We also enunciate the Lagrange method of constants variation; this method forms the basis for obtaining the solution of the differential equation describing the harmonic oscillator underwent stochastic forces. Using this method, we obtain the specific formulas designed to describe the time dependence of the variance of the generalized oscillator coordinate, the variance of its generalized velocity, and the correlator of these two as well as the mean values of the generalized coordinate and velocity. These formulas are valid for the case of the damped oscillations when the oscillator eigen frequency exceeds the damping coefficient. The resulting formulas are analyzed for the limiting cases. In particular, we show that at small values of time the variance of the stochastic harmonic oscillator velocity evolves with time in the same way as the variance of the coordinate for free Brownian particle.

Keywords*:* Brownian motion, thermal fluctuations, teaching physics at technical university, stochastic harmonic oscillator

---

Сведения об авторах:

Гончар Игорь Иванович, д.ф.-м.н., профессор, профессор-консультант кафедры «Физика и химия» ФГБОУ ВО «Омский государственный университет путей сообщения» (644046, Российская Федерация, г. Омск, проспект Маркса, д. 35, e-mail: vigichar@hotmail.com).

Чушнякова Мария Владимировна, к.ф.-м.н., доцент кафедры «Физика» ФГБОУ ВО «Омский государственный технический университет» (644050, Российская Федерация, г. Омск, проспект Мира, д. 11, e-mail: maria.chushnyakova@gmail.com).

Кулик Екатерина Владимировна, студент магистратуры ФГБОУ ВО «Омский государственный технический университет» (644050, Российская Федерация, г. Омск, проспект Мира, д. 11, e-mail: crispus.puella.0808@gmail.com).

Статья поступила в редакцию 15.01.2022 г.