УДК 37.02, ББК 74.262.21 © Р.Ю. Костюченко

Р.Ю. Костюченко

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ УЧАЩИХСЯ РЕШЕНИЮ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ЗАДАЧ: СОДЕРЖАНИЕ ЭТАПОВ РЕШЕНИЯ

В статье рассматривается процессуальный компонент методики обучения учащихся решению математических задач. Автором на основе анализа научно-методической литературы, сравнения, обобщения, изучения педагогического опыта предлагается модель процесса решения задачи, представленная четырьмя этапами: анализ условия, составление плана решения, осуществление плана решения, изучение найденного решения.

Оригинальным результатом можно считать то, что данные этапы наполняются содержанием, которое, с одной стороны, часто является самостоятельным объектом в методике обучения математике, с другой стороны, представляется необходимым и достаточным условием реализации этапов решения задачи. Так, первый этап описывается следующей последовательностью действий: ознакомление с общей ситуацией, описанной в задаче; выявление условия и требования задачи; установление вида, типа задачи; фиксация результатов анализа. Второй этап, по сравнению с первым, несет большую эвристическую нагрузку; здесь автор рассматривает три направления поиска решения математической задачи: связь данной задачи с теорией и другими задачами, анализ требования задачи, анализ условия задачи. Третий этап в большинстве случаев есть синтез результатов поиска плана решения и представляет собой оформительскую процедуру. Четвертый заключительный этап наряду со стандартными проверкой и формулировкой ответа предполагает важную эвристическую составляющую: исследование задачи и хода ее решения – выявление её идеи решения, связи с другими задачами, поиск и осуществление новых способов решения, формулирование и решение задач на основе исходной.

Полученные результаты могут быть применены для дальнейших теоретических изысканий в качестве отправной точки, поскольку материал статьи охватывает структурно все виды деятельности, свойственные решению математической задачи. Материал статьи будет полезен студентам, обучающимся по направлению «педагогическое образование» как материал своеобразной лекции, в которой позиции различных авторов на обучение решению математических задач получают единую трактовку. Представленные результаты будут интересны учителю-практику, поскольку могут явиться структурной моделью для разработки собственной методики по обучению учащихся конкретному виду математических задач. В качестве промежуточных и итоговых выводов автором неоднократно подчеркивается положительная роль решения задач в достижении не только предметных математических, но и личностных и метапредметных результатов обучения.

Ключевые слова: математическая задача, решение задачи, этапы решения задачи, обучение математике, обучение решению задач.

Обучение математике, осуществляемое в современной школе, реализуется во многом посредством решения задач [1, 3]. В методической литературе термин «решение задачи» применяется в трех различных смыслах: решение задачи как план, способ, метод осуществления требования задачи; решение задачи как процесс осуществления требования задачи, как процесс выполнения плана решения; решение задачи как результат выполнения плана решения.

Традиционно в методике обучения математике процесс решения задачи разбивают на этапы. У разных авторов в зависимости от детализации этапов выделяется их различное количество. Так, Л.М. Фридман [7] выделяет восемь этапов, Ю.М. Колягин [3] – шесть. Вслед за Д. Пойа [5] в процессе решения задачи будем выделять четыре основных этапа: осмысление условия задачи, составление плана решения, осуществление плана решения, изучение найденного решения. Первым этапом процесса решения является анализ задачи, который проводится до тех пор, пока не возникает какая-то идея о плане решения, составляющем второй этап деятельности по решению задач. Развертывание плана происходит в процессе его осуществления, который составляет третий этап деятельности по решению задачи. Просмотреть еще раз проделанное решение, проанализировать его с точки зрения поучительности, рациональности, поискать другие способы решения – все это должно составлять четвертый этап деятельности по решению задач – этап исследования решения задачи.

Рассмотрим более подробно содержание каждого этапа.

Первый этап решения задачи – анализ условия. Основная его цель – осмысление условия задачи, на основании которого уже будет проводиться следующий этап по поиску плана решения. Как отмечает Л.М. Фридман, «культура решения задачи заключается в том, что поиск решения совершается на базе глубокого и всестороннего предварительного анализа задачи» [8, с. 251].

Последовательность действий здесь может быть следующей:

а) ознакомление с общей ситуацией, описанной в задаче;

б) выявление условия и требования задачи;

в) установление вида, типа задачи;

г) фиксация результатов анализа.

Сделаем два замечания.

Первое. Иногда, при выявлении требования (вопроса) задачи полезно проверить, возможно ли удовлетворить ее условию, имеет ли задача решение. Например, невозможно доказать казалось бы верное утверждение «сумма квадратов двух чисел всегда больше удвоенного произведения этих чисел». Здесь опровержение следует из примера для равных чисел. Конечно, проверять в каждом случае, имеет ли задача решение, нецелесообразно. Более того, если задача не имеет решения, то и ее условие, видится, будет сформулировано должным образом.

Второе. На этапе анализа задачи следует, как это не казалось бы странным, добиться однозначности понимания ее условия и требования различными субъектами: составителем, учителем и учащимся. Нередко бывает, что ученик, осознанно читая задачу, наделяет ее условие субъективным опытом, привнося в процесс решения дополнительные данные. В результате чего он решает уже другую, придуманную им задачу, а не ту, которую предложил автор. Или же можем встретить случаи, когда задача, взятая из надежного источника, может быть воспринята учителем неоднозначно. Например, в демоверсии ЕГЭ 2003 года предлагалось такое задание: «Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y=(a^x-a^{ax+2})^{-0,5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа». Зададимся риторическим вопросом: фразу в требовании задачи «есть двузначные натуральные числа» следует понимать как «есть хотя бы одно двузначное натуральное число» или же «есть как минимум два двузначных натуральных числа»?

Второй этап – поиск, составление плана решения задачи.

Как правило, именно этот этап вызывает у учащихся наибольшие затруднения. Это связано с тем, что нахождение решения произвольной задачи не алгоритмизировано и требует от школьников проявление творчества. А поскольку «пустая голова не творит», необходима работа по «вооружению» учащихся методам и приемам целенаправленного поиска плана решения как любой задачи, так и математической, в частности.

Стандартные задачи решаются на основе известного алгоритма их решения. Планомерный поиск решения нестандартных задач осуществляется, на наш взгляд, в контексте:

а) связи данной задачи с теорией и другими задачами;

б) анализа требования задачи;

в) анализа условия задачи.

Рассмотрим каждое из обозначенных направлений.

Первое направление поиска плана решения (связь данной задачи с теорией и другими задачами) обуславливает вопросы [5]: Известна ли Вам какая-нибудь родственная задача? Аналогичная? Нельзя ли применить ее результат? Метод решения? Нельзя ли придумать более доступную сходную задачу? Не знаете ли Вы теоремы, которая могла бы оказаться полезной?

Как видим, совокупность перечисленных вопросов взывает непосредственное использование метода аналогии. Данный метод может быть представлен схемой (рис. 1), компонентами которой будут: решаемая задача, вспомогательная задача, решение вспомогательной задачи, установленный факт и/или метод вспомогательной задачи, решение исходной задачи.

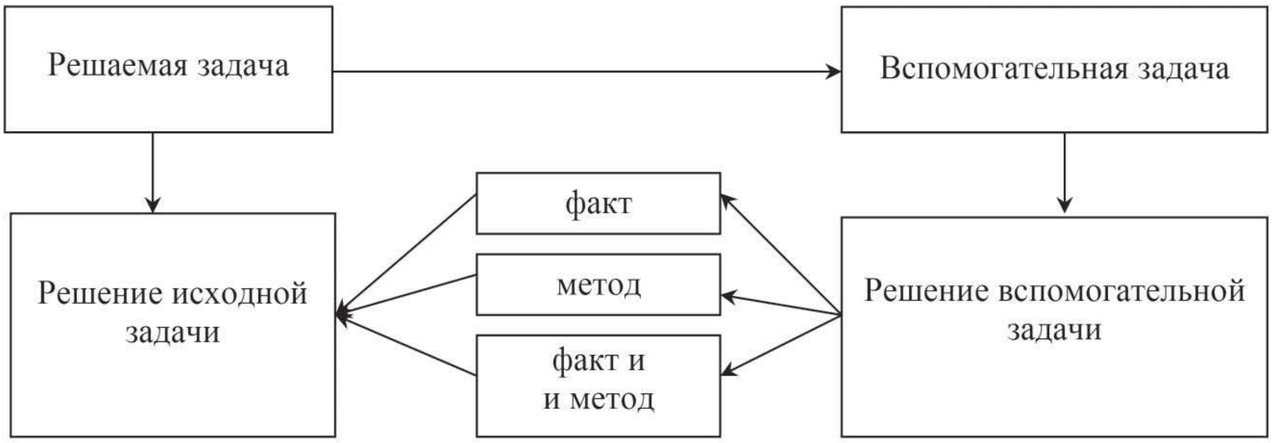

Рис. 1. Схема поиска решения задачи по аналогии

Тогда возможен как непосредственный переход от решаемой задачи к ее решению, так и переход, осуществляемый с использованием метода аналогии, при котором последовательно реализуются все обозначенные компоненты. Покажем последнее на примере.

Решаемая задача. Решить уравнение: $9^x+6^x=2^{2x+1}$.

Вспомогательная задача. Как ни удивительно, но опыт показывает, что эффективной вспомогательной задачей здесь может служить требование решить уравнение: $2\cos^2x-$

$3\cos x\cdot\sin x+2\sin^2 x=0$. Обуславливается подобное тем, что указанные уравнения являются однородными уравнениями второй степени, а метод решения однородных уравнений в явном, формализованном виде излагается учителями именно при решении тригонометрических уравнений, до этого же решение подобных уравнений рассматривается на содержательном уровне.

Решение вспомогательной задачи. Деление обоих частей уравнения на $\sin^2 x\neq 0$ и решение полученного уравнения как квадратного относительно tg$x$.

Метод вспомогательной задачи. Уравнение вида $a\cdot f^2(\mathrm{x})+b\cdot f(x)\cdot g(x)+c\cdot g^2(x)=0$, где a, b, c – ненулевые действительные числа, называется полным однородным уравнением второй степени относительно функций $f(x)$ и $g(x)$. Метод решения таких уравнений – сведение к квадратному уравнению делением на одно любое из слагаемых.

Решение исходной задачи. Рассуждая аналогично, исходное уравнение после несложных преобразований можно представить и решить по алгоритму как однородное уравнение второй степени относительно 3^x и 2^x.

Второе направление поиска плана решения (анализ требования задачи) предполагает выяснение возможных путей ответа на вопрос задачи, чаще всего, представляет собой восходящий или нисходящий анализ.

Восходящий анализ (совершенный анализ, анализ Паппа) основан на отыскании достаточных оснований справедливости заключения. Ведущим вопросом здесь является «что надо (достаточно) знать, чтобы ответить на поставленный вопрос?» [2, с. 119]. Таким образом, от следствия «восходят» к основанию.

Нисходящий анализ (несовершенный анализ, анализ Евклида) основан на отыскании необходимых признаков справедливости суждения с последующей проверкой обратимости рассуждений (в случае истинности последнего), либо заключением о ложности доказываемого утверждения (метод от противного).

Третье направление поиска плана решения, наряду со вторым (анализ условия задачи), обусловливает использование эвристических схем поиска плана решения задачи [6, 7]. Чаще всего, это одна из следующих шести:

- решение более общей задачи и перенесение ее результата на исходную задачу;
- решение частной задачи, прием рассмотрения предельного случая;
- метод разбиения задачи на подзадачи;
- метод преобразования задачи;
- метод моделирования;
- метод введения вспомогательных элементов.

Покажем реализацию одной из таких эвристических схем на примере решения следующей задачи «Проведены трисектрисы двух углов треугольника, доказать равенство указанных на чертеже углов» (рис. 2). Суть эвристического метода преобразования задачи в том, что решаемую задачу преобразуют, но не меняя язык, на котором она была задана. В нашем случае «сотрем» «лишние» линии (рис. 3), тогда становится очевидной идея решения: точка внутри оставшегося треугольника есть точка пересечения его биссектрис.

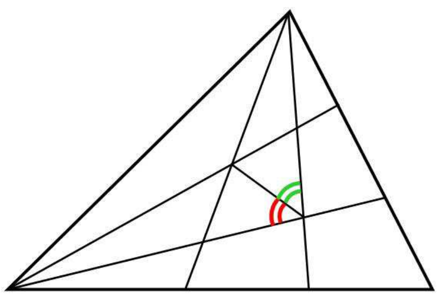

Рис. 2. Чертеж-условие к задаче о доказательстве равенства углов

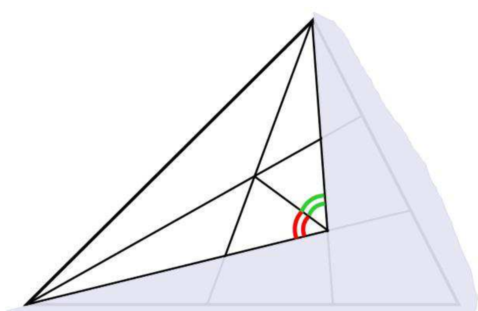

Рис. 3. Чертеж-пояснение к решению задачи о доказательстве равенства углов

Третий этап решения задачи – осуществление найденного плана решения.

На данном этапе план решения, полученный в результате деятельности на первых двух этапах, излагается полностью и оформляется каким-либо доступным способом. Чаще всего в тетради в виде последовательности силлогизмов. Здесь, казалось бы, что может быть проще, чем записать придуманное ранее. Однако практика показывает, что с данным этапом на должном уровне справляются лишь немногие учащиеся; приходится констатировать, что уровень культуры письменной математической речи у большинства школьников остается низким.

Выделим два основных аспекта, на которые следует обратить внимание при оформлении решения (на основе проверки решений задач с развернутым ответом основного государственного экзамена в 9 классе и единого государственного экзамена в 11 классе):

1. Доказательство, как правило, разбивается на отдельные шаги – силлогизмы. Однако грамотно выделить в каждом силлогизме большую и малую посылки, а также следующий из них вывод, оказывается затруднительным, а для многих – непосильной задачей.

2. При решении задачи или доказательстве какого-либо утверждения следует учить школьников выделять ключевые моменты решения, требующие доказательства.

Например, рассмотрим задачу: «В равнобедренном треугольнике *ABC* угол *C* равен 110º. Отрезки *AD* и *BE* – биссектрисы углов *CAB* и *CBA* соответственно. Найдите острый угол между *AD* и *BE*». Типичная ошибка состоит в том, что угол *C* учащиеся принимают за угол при основании равнобедренного треугольника, затем по теореме о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника делают вывод о том, что и второй угол (*A* или *B* в зависимости от выполненного рисунка) этого треугольника равен 110º. Как следствие получаем неверное решение. Видится, первое, что в этой задаче требует доказательных пояснений, – это определение того, какие стороны данного треугольника являются боковыми, а какая – основанием. Далее решение очевидно и может быть выполнено разными способами.

Четвертый этап – изучение найденного решения.

На данном этапе выполняются:

а) проверка;

б) исследование задачи (при каких условиях задача имеет решение и сколько различных в каждом случае; при каких условиях задача вообще не имеет решения);

в) формулирование ответа.

Заметим, что в контексте данной статьи указанные действия хотя и предполагаются обязательными, однако на практике необходимость их выполнения непосредственно будет зависеть от самой задачи.

Так, проверка, при решении по известному алгоритму уравнения $5x–4=3x+20$, не требуется, она не является логически необходимой, и проводится лишь по методическим соображениям. Проверка же в решении уравнения $\ln(5x–4)=\ln(3x+20)$ потенцированием, если не рассматривались необходимые ограничения, является обязательной.

Исследование задачи как самостоятельный этап выступает при решении задач на построение циркулем и линейкой. В остальных случаях его необходимость может быть продиктована вариативностью условия.

Приведем пример задачи с вариативным условием: «Найдите площадь трапеции, вписанной в окружность радиуса 25, если расстояние от ее центра до оснований равны 24 и 15, а сами основания равны 14 и 40». Данная задача имеет два возможных ответа; различие обуславливается двумя возможными подходами к конфигурации чертежа: первый – основания трапеции расположены по одну сторону от центра окружности, второй – по разные стороны (рис. 4). Конечно, можно говорить, что это различие должно быть выявлено на этапе анализа условия задачи. Отчасти это верно, но не будем забывать о том, что выделение этапов в решении задачи удобно и целесообразно для теоретических изысканий, на практике же процесс решения задачи представляет собой непрерывный процесс, в котором обозначенные этапы могут сливаться, видоизменяться, изменять порядок следования. Заметим здесь, что рассматриваемая задача является задачей с избыточными данными, что также должно найти отражение в работе с ней, и если это не было сделано на этапе анализа, то при изучении найденного решения должно быть учтено.

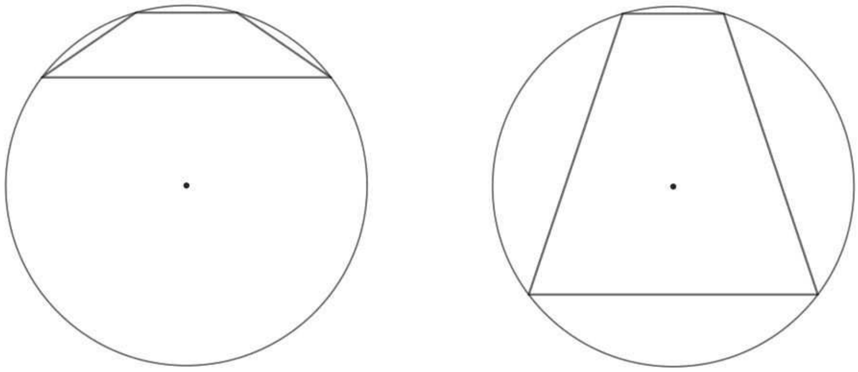

Рис. 4. Конфигурации чертежа к задаче о площади трапеции

Приведем пример, в котором вариативность условия обнаруживается на этапе исследования задачи.

Так, решение задачи «В треугольнике ABC известны стороны AB=6, BC=7 и косинус угла BAC, равный 23/72. Найдите длину стороны AC» может быть следующим: для треугольника ABC по теореме косинусов выполняется равенство $BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$. Пусть $AC=x$, тогда, с учетом данных условия, $72=62+x^2-2\cdot 6\cdot x\cdot\cos A$, откуда $x^2-23/6x-13=0$, $x_1=6$, $x_2=-13/6$ (не удовлетворяет условию задачи), поэтому AC=6.

Изменим числовые данные в условии и получим задачу: «В треугольнике ABC известны стороны AB=9, BC=4 и косинус угла BAC, равный 129/144. Найдите длину стороны AC». Аналогично, обозначая $AC=x$, получим уравнение $x^2-129/8x+65=0$, которое имеет корни $x_1=8$, $x_2=8{,}125$. Может ли задача иметь более одного решения? Если да, то два или более? Как показывает исследование задачи, оба варианта возможны. Возможность двух и только двух ответов объясняется тем, что в первом случае треугольник ABC будет тупоугольным, во втором – остроугольным. Причем, заметим, в обоих случаях отличие угла BCA от прямого составляет менее одного градуса.

На четвертом этапе решения задачи помимо перечисленных выше действий (проверки, исследования и формулирования ответа) полезно провести познавательный анализ задачи и ее решения, который, на наш взгляд, предполагает три направления деятельности:

г) исследование задачи и хода ее решения;

д) поиск и осуществление новых способов решения задачи;

е) формулирование и решение задач на основе исходной.

Исследование задачи и хода ее решения, во-первых, предполагает выявление идеи, главной мысли, положенной в основу решения. Это важно, ибо сама математическая задача решается учащимся не ради получения математического факта (он есть в ответах). Методически грамотно организованное решение задачи обеспечивает реализацию предметных результатов, способствует достижению личностных и метапредметных результатов обучения.

Как отмечается в научно-методической литературе [4], по отношению к некоторым задачам с ярко выраженными особенностями следует делать выводы о том, как в подобных случаях находится и осуществляется решение, а так же и то, какие особенности задач подсказывают прием решения. Приведем пример такой задачи: «Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $x^2+(a+7)^2=|x-7-a|+|x+a+7|$ имеет единственный корень».

Решение. Если x_0 является корнем исходного уравнения, то можно заметить, что и $-x_0$ является его корнем. Значит, исходное уравнение имеет единственный корень, только если $x_0=-x_0$, т.е. при $x_0=0$. Подставим значение $x=0$ в исходное уравнение: $(a+7)^2=2|a+7|$, $|a+7|\cdot(|a+7|-2)=0$, откуда $|a+7|=0$ или $|a+7|=2$. Решая эти уравнения, получим $a=-7$, $a=-5$ и $a=-9$. Теперь проверим, при каких найденных значениях параметра исходное уравнение на самом деле имеет один корень. При $a=-7$ исходное уравнение примет вид $x^2=2|x|$. Корнями этого уравнения являются числа $x=0$ и $x=\pm 2$, т.е. исходное уравнение имеет более одного корня. При $a=-5$ или $a=-9$ исходное уравнение принимает вид: $x^2+4=|x-2|+|x-2|$. Это уравнение действительно имеет единственный корень $x=0$. Ответ: $a=-5$ и $a=-9$.

Комментарий к решению. В условии задачи есть требование найти значения параметра, при которых уравнение имеет единственный корень. При этом уравнение таково, что этот единственный корень однозначно определяется. Решение состоит в том, чтобы обоснованно найти значение этого корня, далее найти все значения параметра, для которых этот корень получается, затем проверить, будет ли уравнение при найденных значениях параметра иметь только один корень.

Исследование задачи и хода ее решения, во-вторых, предполагает выявление связей с ранее решенными задачами. Это важно, ибо в противном случае стоит задаться вопросом: какую ценность имеет задача, если она рассматривается как изолированная, не соотносится с классом подобных ей задач? Ответ здесь прост: в учебных целях получение ответа к одной конкретной математической задаче имеет ничтожно малую ценность.

Наряду с исследованием задачи и хода ее решения не менее важными являются еще два направления, названные выше: это поиск и осуществление новых способов решения задачи, а также формулирование и решение задач на основе исходной. Данные три направления, взятые вкупе, позволяют говорить о несомненных обучающих и развивающих функциях задач. А решение задачи, представленное всеми этапами, есть необходимое условие образовательных целей.

В заключение представим содержание методики решения задачи в виде схемы (рис. 5).

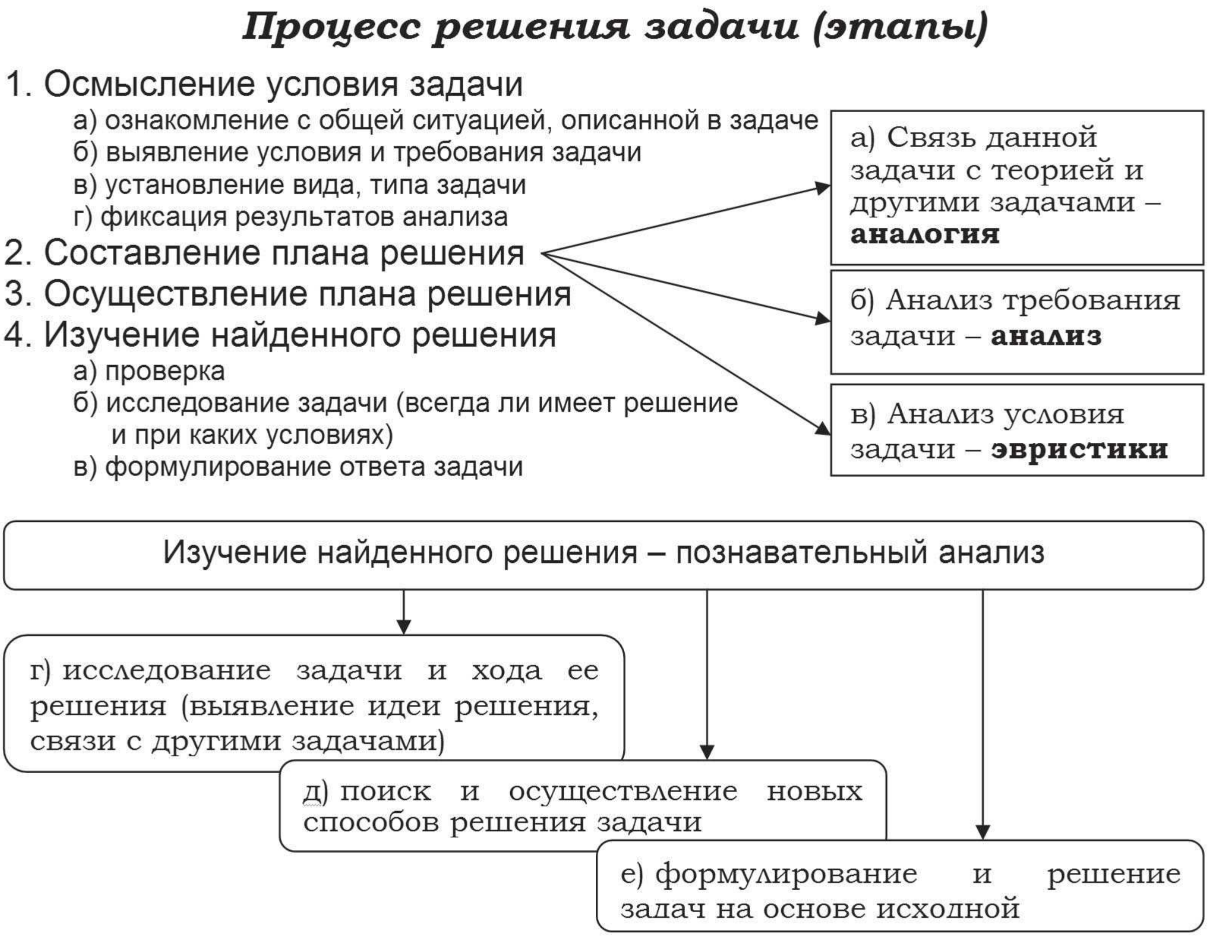

Рис. 5. Схема решения математической задачи

Как показывают наблюдения, востребованными и чаще реализуемыми на практике являются этапы, нацеленные на получение ответа или выполнение требования задачи. Причем направленность на получение ответа обуславливает и сведение к минимуму действий, составляющих каждый этап решения. При таком подходе теряется учебная ценность задачи, теряется ее воспитательный и развивающий потенциал. Особую значимость в плане личностного развития учащегося, достижения метапредметных результатов обучения составляют второй и четвертый этапы решения задачи, которые менее алгоритмизированы по сравнению с первым и третьим этапами ее решения.

Библиографический список

1. Далингер В.А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач [Текст]: учеб. пособие. – Омск: Изд-во ОмГПУ, 2001. – 365 с.

2. Епишева О.Б. Общая методика обучения математике в средней школе [Текст]: курс лекций: учеб. пособие для студ. пед. вузов. – Тобольск: Изд-во ТГПИ им. Д.И. Менделеева, 2008. – 202 с.

3. Колягин Ю.М. Задачи в обучении математике [Текст]. В 2-х частях: Ч. 1. Математические задачи как средство обучения и развития учащихся, Ч. 2. Обучение математике через задачи и обучение решению задач. – М.: Просвещение, 1977. – 112 с. (Ч. 1). – 144 с. (Ч. 2).

4. Методика преподавания математики в средней школе. Общая методика [Текст] / А.Я. Блох, Е.С. Канин, Н.Г. Килина и др.; Сост. Р.С. Черкасов, А.А. Столяр. – М.: Просвещение, 1985. – 336 с.

5. Пойа Д. Как решать задачу [Текст]. – М.: Учпедгиз, 1959. – 208 с.

6. Саранцев Г.И. Методика обучения математике в средней школе [Текст]. – М.: Просвещение, 2002. – 224 с.

7. Фридман Л.М. Теоретические основы методики обучения математике [Текст]: пособие для учителей, методистов и педагогических высших учебных заведений. – М.: Флинта, 1998. – 224 с.

8. Фридман Л.М. Как научиться решать задачи [Текст]: пособие для учащихся / Л.М. Фридман, Е.Н. Турецкий. – М.: Просвещение, 1984. – 175 с.

References

1. Dalinger V.A. *Metodika obucheniya uchashchihsya stereometrii posredstvom resheniya zadach: uchebnoe posobie* [Methods of teaching students stereometry by solving problems: tutorial]. Omsk: OSPU, 2001. 365 p

2. Episheva O.B. *Obshchaya metodika obucheniya matematike v srednej shkole: kurs lekcij: uchebnoe posobie dlya studentov pedagogicheskih vuzov* [General methods of teaching mathematics in secondary school: course of lectures: tutorial for students of pedagogical universities]. Tobolsk, D.I. Mendeleev Tobolsk Pedagogical Institute, branch of University of Tyumen, 2008. 202 p.

3. Kolyagin YU.M. *Zadachi v obuchenii matematike. V 2-h chastyah: CH. 1. Matematicheskie zadachi kak sredstvo obucheniya i razvitiya uchashchihsya, CH. 2. Obuchenie matematike cherez zadachi i obuchenie resheniyu zadach* [Problems in the teaching of mathematics. In 2 parts: Part. 1. Mathematical problems as a means of learning and development of students, Part 2. Teaching mathematics through problems and problem solving training]. Moscow, Prosveshchenie, 1977, Part 1, 112 p.; Part 2, 144 p.

4. *Metodika prepodavaniya matematiki v srednej shkole. Obshchaya metodika* [Method of teaching mathematics in main school. General methodology] Ed. by R.S. CHerkasov, A.A. Stolyar. Moscow, Prosveshchenie, 1985. 336 p.

5. Poja D. *Kak reshat' zadachu* [How to solve the problem]. Moscow, 1959. 208 p.

6. Sarancev G.I. *Metodika obucheniya matematike v srednej shkole* [Methods of teaching mathematics in main school]. Moscow, Prosveshchenie, 2002. 224 p.

7. Fridman L.M. *Teoreticheskie osnovy metodiki obucheniya matematike: posobie dlya uchitelej, metodistov i pedagogicheskih vysshih uchebnyh zavedenij* [Theoretical basis of methods of teaching mathematics: tutorial for teachers, methodologists and pedagogical higher educational institutions]. Moscow, 1998. 224 p.

8. Fridman L.M., Tureckij E.N. *Kak nauchit'sya reshat' zadachi: posobie dlya uchashchihsya* [How to learn to solve problems: tutorial guide for students]. Moscow, Prosveshchenie, 1984. 175 p.

METHODOLOGY OF TEACHING STUDENTS OF SOLVING MATHEMATICAL PROBLEMS: SOLUTION STEPS AND THEIR CONTENT

Roman Yu. Kostyuchenko,
Associate Professor, Omsk State Pedagogical University

Abstract. The article presents the procedural component of the method of teaching students to solve mathematical problems. On the basis of analysis of scientific and methodological literature, comparison, generalization and the study of teaching experience, a model of the problem solving process, represented by four stages: condition analysis, planning solution, implementation of solutions, studying of the computed solution is proposed by the author.

The original result can be considered that these stages are filled with the content, which, on the one hand, is often a self-sustained object in the methodology of teaching mathematics, but, on the other hand, is a necessary and sufficient condition for the implementation of the stages of the solution of the problem. The last - mentioned allows us to talk about the theoretical and practical significance.

The obtained results can be applied for the further theoretical research as a starting point, whereas the material of the article covers structurally all activities inherent in the solution of mathematical problems. The material of the article will be useful for students studying under the direction of "pedagogical education" as a material of a kind of lecture in which the positions of various authors on the teaching of solving mathematical problems have a single interpretation. The presented results will be of interest to a teacher – practitioner, as far as they can be a structural model for the developing his own methods for teaching students a specific type of mathematical problems.

The positive role of solving the problem in achieving not only the mathematical subject results, but also personal and meta-subject results of teaching is multiply emphasized by the author in both intermediate and final conclusions. The second and fourth more heuristic stages will increasingly contribute to this in comparison with the first and second more algorithm-driven stages of solving the problem.

Key words: mathematical problem, problem solving, problem solving stages, teaching mathematics, teaching of the solution of the mathematical problems.

Сведения об авторе:

Костюченко Роман Юрьевич – кандидат педагогических наук, доцент, доцент кафедры математики и методики обучения математике Омского государственного педагогического университета (г. Омск, Российская Федерация), e-mail: kostyuchenko@omgpu.ru.

Статья поступила в редакцию 16.11.2018 г.